Ejercicios de Análisis Funcional
Relación 6 - Los tres principios fundamentales del Análisis Funcional

1. Sea X un espacio vectorial, $\alpha, \beta : X \to \mathbb{R}$ dos seminormas y $f \in X^\sharp$ verificando que

$$|f(x)| \leqslant \alpha(x) + \beta(x) \quad (x \in X)$$

Prueba que existen dos funcionales lineales $g, h \in X^\sharp$ tales que para todo $x \in X$ se verifica que:

$$f(x) = g(x) + h(x); \quad |g(x)| \leqslant \alpha(x); \quad |h(x)| \leqslant \beta(x)$$

Sugerencia: Trabaja en el espacio vectorial producto $X \times X$.

2. Sea X un espacio normado real, M un subespacio vectorial de X y f, g funcionales lineales en M verificando que

$$|f(m)| + |g(m)| \leqslant \|m\| \quad (m \in M).$$

Prueba que existen $F, G \in X^*$ que extiende a f y a g respectivamente y verifican que

$$|F(x)| + |G(x)| \leqslant \|x\| \quad (x \in X)$$

Sugerencia: Usar los funcionales $f + g$ y $f - g$.

3. Sea $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ y $f : M \to \mathbb{R}$ el funcional lineal $f(x, -x) = x$. Calcula la norma de f cuando en M se consideran las normas inducidas por las normas $\| \, \|_2$, $\| \, \|_1$ y $\| \, \|_\infty$ en $\mathbb{R}^2$. En cada caso calcula todas las posibles extensiones de f a $\mathbb{R}^2$ conservando la norma.

4. Consideremos el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ dado por $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 2x = 0\}$ y el funcional $f : M \to \mathbb{R}$ dado por $f(x, y) = x$ para todo $(x, y) \in M$. Calcula una extensión Hahn-Banach de f en ℓ_2^2 y comprueba que es única. Estudia el mismo problema en ℓ_1^2.

5. Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $u \in X \setminus M$. Prueba que la forma lineal $f : M \oplus \mathbb{K}\, u \to \mathbb{K}$ dada por $f(m + \lambda u) = \lambda$ es continua si, y sólo si, $u \notin \overline{M}$, en cuyo caso, $\|f\| = 1/\operatorname{dist}(u, M)$.

6. Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $u \in X$. Prueba que existe $f \in X^*$ tal que $|f(x)| \leqslant \operatorname{dist}(x, M)$ para todo $x \in X$ y $f(u) = \operatorname{dist}(u, M)$.

7. Se considera el espacio normado real ℓ_1 y el subespacio

$$M = \{x \in \ell_1 : x(1) - 3x(2) = 0\}$$

Calcula una extensión Hahn-Banach del funcional $f : M \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x(1)$ para todo $x \in M$.

8. a) Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $f : M \to \mathbb{K}$ un funcional lineal continuo. Prueba que el funcional $F : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ dado por $F(x) = f(P_M(x))$ donde P_M es la proyección ortogonal sobre M es la única extensión Hahn-Banach de f.

   b) En el caso en que M sea un hiperplano dado por $M = \{x \in \mathcal{H} : (x \mid a) = 0\}$, donde $a \in \mathcal{H}$ y $a \neq 0$, y $f : M \to \mathbb{K}$ venga dado por $f(x) = (x \mid b)$, prueba que la única extensión Hahn-Banach de f viene dada por

$$F(x) = (x \mid b) - \frac{(a \mid b)}{\|a\|^2}(x \mid a) \quad (x \in \mathcal{H})$$

   c) Sea $M = \left\{ f \in L_2[0,1] : \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}$ y sea $\varphi : M \to \mathbb{K}$ el funcional lineal y continuo $\varphi(f) = \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ para todo $f \in M$. Calcula la única extensión Hahn-Banach de φ.

9. Prueba que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $f \in C[0,1]^*$ verificando que $f(p) = p'(0)$ para todo polinomio p de grado menor o igual que N.¿Existe un funcional lineal y continuo f en $C[0,1]$ tal que $f(p) = p'(0)$ para todo polinomio p?

10. Sea X un espacio normado y $x \in S_X$. Prueba que existe un subespacio cerrado M de X tal que $X = M \oplus \mathbb{K}\,x$ y $\operatorname{dist}(x, M) = 1$.

11. Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X, Y)$ un operador lineal continuo y sobreyectivo. Sea $C \subset X$ un subconjunto no vacío de X. Prueba que $T(C)$ es cerrado si, y sólo si, $\ker(T) + C$ es cerrado.

12. Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X, Y)$ un operador lineal continuo y sobreyectivo. Prueba que existe $m > 0$ tal que para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ con $Tx = y$ y $\|x\| \leqslant m\|y\|$.

13. Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Banach X tales que $X = M \oplus N$. Prueba que existe $k > 0$ tal que $\|m\| \leqslant k\|m+n\|$ para todos $m \in M$, $n \in N$.

14. Sean $\| . \|_1$ y $\| . \|_2$ dos normas completas en un espacio vectorial X que tienen los mismos funcionales lineales continuos. Prueba que dichas normas son equivalentes.

15. **Límites de Banach.** Sea ℓ_∞ el espacio de Banach de las sucesiones acotadas de números reales. Sean $T, S : \ell_\infty \to \ell_\infty$ los operadores definidos por:

$$Tx = (0, x(1), x(2), x(3), \dots), \quad S(x) = (x(2), x(3), \dots) \quad (x \in \ell_\infty)$$

Sea $Y = \{x - Tx : x \in \ell_\infty\}$ y u la sucesión constante $(1, 1, 1, \dots)$.

a) Prueba que $\operatorname{dist}(u, Y) = 1$.

Sugerencia. Si $x \in \ell_\infty$, dado $\varepsilon > 0$, tiene que existir algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $x(n) - x(n-1) < \varepsilon$.

b) Sea $\varphi \in \ell_\infty^*$ tal que $\varphi(u) = 1 = \|\varphi\|$ y $\ker(\varphi) \supset Y$ (cuya existencia es consecuencia del teorema de Hahn-Banach). Prueba que $\varphi(Tx) = \varphi(x)$ y $\varphi(Sx) = \varphi(x)$.

c) Sea $x \in \ell_\infty$ y pongamos $m = \inf \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $M = \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Prueba que $m \leqslant \varphi(x) \leqslant M$.

Sugerencia. $\left| \varphi(x) - \dfrac{m+M}{2} \right| = \left| \varphi\left(x - \dfrac{m+M}{2} u \right) \right|$.

d) Aplicando el resultado obtenido en el punto anterior a $S^m(x)$ deduce que para todo $x \in \ell_\infty$ se verifica:

$$\liminf \{x_n\} \leqslant \varphi(x) \leqslant \limsup \{x_n\}$$

e) Sea $x \in \ell_\infty$ una sucesión periódica, es decir, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x(p+n) = x(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcula $\varphi(x)$.

16. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : \ell_\infty \to \mathbb{K}$ el funcional definido por

$$f_n(x) = \frac{x(1) + x(2) + \cdots + x(n)}{n} \quad (x \in \ell_\infty)$$

Sea $M = \{x \in \ell_\infty : \{f_n(x)\} \text{ converge}\}$, y definamos el operador $F : M \to \mathbb{K}$ por $F(x) = \lim \{f_n(x)\}$ para todo $x \in M$.

a) Prueba que $f_n \in \ell_\infty^*$ y que $\|f_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Prueba que M es un subespacio vectorial cerrado de ℓ_∞ que contiene al espacio c de las sucesiones convergentes.

c) Prueba que $F \in M^*$ con $\|F\| = 1$ y que $F(x) = \lim\{x_n\}$ para todo $x \in c$.

d) Sea $\tau(x) = (x(2), x(3), \dots),\ \forall x \in \ell_\infty$. Prueba que $x - \tau(x) \in \ker(F) \subset M$ para todo $x \in \ell_\infty$.

e) Deduce que existe $S \in \ell_\infty^*$, extensión de F, tal que $\|S\| = 1$ y $S(x) = S(\tau^n(x))$ para todo $x \in \ell_\infty$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

f) Prueba que $S(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \dots) = \frac{1}{4}$. ¿Cuánto vale $S(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$?

17. Sea M un subespacio vectorial de un espacio normado X y $T \in L(M, \ell_\infty)$. Prueba que existe $S \in L(X, \ell_\infty)$ que extiende a T y $\|S\| = \|T\|$.

18. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $S, T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operadores lineales con la propiedad de que para todos $x, y \in \mathcal{H}$ se verifica que $(T(x) \mid y)) = (x \mid S(y))$. Prueba que T y S son continuos y $\|T\| = \|S\|$.

19. Prueba que en el espacio de Banach $C([0, 1])$ las funciones que son derivables en el punto $1/2$ forman un conjunto de primera categoría.

20. Sea X un espacio normado y $f : \mathbb{C} \to X$ una función entera, es decir, derivable en $\mathbb{C}$. Prueba que si f está acotada entonces es constante.

21. Prueba que si X es un espacio normado reflexivo y $x^* \in X^*$, entonces existe $x \in S_X$ tal que $x^*(x) = \|x^*\|$.

22. Sea X un espacio de Banach. Prueba que si X^* contiene un subespacio cerrado propio que separa los puntos de X, entonces X no es reflexivo.

23. La aplicación identidad $I_d : (\ell_1, \|\,.\,\|_1) \to (\ell_1, \|\,.\,\|_\infty)$ es continua. ¿Es continua su inversa? ¿Contradice esto el teorema de los isomorfismos de Banach?

24. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Se define una nueva norma en X mediante la expresión $|||x||| = \|x\| + \|T(x)\|$ para todo $x \in X$. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) T es continua.

    b) $\|\,.\,\|$ y $|||\,.\,|||$ son normas equivalentes.

    c) $|||\,.\,|||$ es una norma completa en X.

25. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Prueba que T es inyectiva y $T(X)$ es cerrado en Y si, y sólo si, existe $m > 0$ tal que $\|T(x)\| \geqslant m\|x\|$ para todo $x \in X$.

26. Sea M un subespacio cerrado de ℓ_p y de ℓ_q. Prueba que las normas inducidas en M por ℓ_p y ℓ_q son equivalentes.

27. Sea $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para todo $x \in \ell_1$ se verifica que la sucesión $\{x(n)u(n)\}$ está acotada. Prueba que $u \in \ell_\infty$.

28. Sea $p > 1$ y $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para todo $y \in \ell_p$ la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)y(n)$ es convergente. Prueba que $x \in \ell_q$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

29. Prueba que si X e Y son espacios normados, $T : X \to Y$ es un operador lineal con gráfica cerrada y $T(X)$ tiene dimensión finita, entonces T es continuo.

30. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y F un subconjunto de $L(X, Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) F está acotado.

    b) Para cada $x \in X$ y cada $g \in Y^*$ el conjunto $\{g(T(x)) : T \in F\}$ está acotado.

31. Sean X e Y espacios de Banach, y $A \subset Y^*$ tal que A separa los puntos de Y. Prueba que si $T : X \to Y$ es una aplicación lineal tal que $f \circ T \in X^*$ para todo $f \in A$, entonces T es continua.

32. Sea X un espacio de Banach. Dada una aplicación lineal $T : X \to \ell_\infty$ se considera, para cada $n \in \mathbb{N}$, el funcional lineal $T_n : X \to \mathbb{K}$ definido por:

    $$T_n(x) = [T(x)](n) \quad (x \in X)$$

    Prueba que T es continua si, y sólo si, $T_n \in X^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

33. Sea $T : c_0 \to c_0$ la aplicación lineal definida por

    $$[T(x)](n) = \frac{1}{n}x(n) \quad (x \in c_0, n \in \mathbb{N})$$

    ¿Es T continua? ¿Es T abierta? ¿Es $T(c_0)$ densa en c_0?